

UAA 3 : Limites et asymptotes

Exercices supplémentaires

A. Limites en un réel

Calcule les limites suivantes (distingue éventuellement les limites à gauche et à droite) :

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x}{x} \quad \text{Sol : } -2$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 + 2x - 15}{x^2 + 8x + 15} \quad \text{Sol : } 4$$

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} \quad \text{Sol : } 0$$

$$(4) \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 3x + 4}{x^2 - 4x + 4} \quad \text{Sol : } +\infty$$

$$(5) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 1}{|x^2 - 4|} \quad \text{Sol : } +\infty$$

$$(6) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{x} \quad \text{Sol : } \frac{1}{2}$$

$$(7) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x-1} - 1}{\sqrt{x-1}} \quad \text{Sol : } 0$$

$$(8) \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{\sqrt{3x} - 3} \quad \text{Sol : } 81$$

$$(9) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x} - \sqrt{x+2}}{1 - \sqrt{3-x}} \quad \text{Sol : } \frac{1}{2}$$

$$(10) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8} - 3}{\sqrt[3]{x} - 1} \quad \text{Sol : } \frac{1}{2}$$

$$(11) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot (\sqrt{1+x+x^2} - 1) \quad \text{Sol : } \frac{1}{2}$$

$$(12) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x^2 - 3x + 2} - \frac{2}{x - 1} \right)$$

$$\text{Sol : } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$$

$$(13) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x^2 - 4 + \frac{1}{x} \right)$$

$$\text{Sol : } +\infty$$

$$(14) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x}{x^3}$$

$$\text{Sol : } -\infty$$

$$(15) \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)$$

$$\text{Sol : } +\infty$$

$$(16) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - x - 12}{x + 3}$$

$$\text{Sol : } -7$$

$$(17) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{2x^3 - x^2 + x - 2}$$

$$\text{Sol : } \frac{1}{5}$$

$$(18) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{x}}{\frac{2+x}{x}}$$

$$\text{Sol : } \frac{3}{2}$$

$$(19) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3 + \frac{1}{x-1}}{2 - \frac{x}{x-1}}$$

$$\text{Sol : } -1$$

$$(20) \lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{\frac{x+3}{x-5}}$$

$$\text{Sol : } \text{limite à droite} = +\infty$$

La limite à gauche n'a pas de sens.

$$(21) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\text{Sol : } \text{limite à gauche} = +\infty$$

La limite à droite n'a pas de sens.

$$(22) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x}{x^3}$$

$$(23) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} - \frac{3x}{x^2 - 4x + 4}$$

$$(24) \lim_{x \rightarrow -2} (2x+4) \frac{5x}{x^3 + 6x^2 + 11x + 6}$$

$$(25) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{x-5} - 2}{\frac{1}{-x} - x}$$

$$(26) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt[3]{7x+1}}{x-1}$$

$$(27) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - 1}{x^2} \quad \text{Sol : } \frac{1}{3}$$

$$(28) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + |2x|}{x^2 + |x|} \quad \text{Sol : } 2$$

$$(29) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^n - 1} \quad \text{Sol : } \frac{1}{n}$$

$$(30) \lim_{x \rightarrow a} \frac{a\sqrt{ax} - x^2}{a - \sqrt{ax}} \quad \text{Sol : } 3a$$

B. Limites en l'infini

1. Calcule les limites suivantes :

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 3x}{3x^2 - 5x + 1} \quad \text{Sol : } \frac{2}{3}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 5x + 3}{4x^2 + 2x - 1} \quad \text{Sol : } +\infty$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 3x^2}{x^2 - 1} \quad \text{Sol : } +\infty$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 5x + 6}{2x^2 - 6x} \quad \text{Sol : } \frac{1}{2}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{-x+1}{x^2+1}} \quad \text{Sol : } 0^+$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \sqrt{x^2 + 1} \right)$$

- (7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x)$ *Sol* : $\frac{1}{2}$
- (8) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{-x^3 + x^2 + x}$ *Sol* : $+\infty$
- (9) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-1)^7}{x^7 + 3x^5 + 2x^2}$
- (10) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 4x + 4} - x)$
- (11) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 2x + 4} + 2x)$
- (12) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 3} - x}{x}$
- (13) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + \sqrt{x^2 + 1})$
- (14) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 3}}{x + 1}$
- (15) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 - 3}}{-3x + 1}$
- (16) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{x})$
- (17) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} - \sqrt{x} \right)$
- (18) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x} + 2}{\frac{1}{x^2 - 1}}$
- (19) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x + 1}{\frac{1}{x} - 2} \right)$
- (20) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2x^2 + x - 1}{3x^2 - 2x + 7}}$

$$(21) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1+\sqrt{x^2+4x+1}}{x+3}$$

$$(22) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+5} - \sqrt{x-3}) \quad \text{Sol : } 0$$

$$(23) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1} - x) \quad \text{Sol : } +\infty$$

$$(24) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1} - x) \quad \text{Sol : } 0$$

$$(25) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{\sqrt{x^4}}}{x} \quad \text{Sol : } -1$$

$$(26) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x} \quad \text{Sol : } \frac{1}{2}$$

2. Limite de la composée d'une fonction

Soit la fonction $f(x) = \frac{2x-3}{x+5}$.

(1) Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-3}{x+5}$ et déduis-en $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x))$.

(2) Détermine l'expression analytique de $f(f(x))$ (simplifie au maximum) et calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x))$ avec cette expression, pour retrouver le résultat obtenu en (1).

C. Limites et asymptotes

1. Détermine les équations des deux asymptotes obliques au graphe de la fonction

$$f(x) = \sqrt{4x^2 - 8x}.$$

$$\text{Sol : } AO_{+\infty} \equiv y = 2x - 2 \text{ et } AO_{-\infty} \equiv y = -2x + 2$$

2. Détermine les équations des deux asymptotes obliques au graphe de la fonction

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Sol : $AO_{-\infty} \equiv y = -x$ et $AO_{+\infty} \equiv y = x$

3. Détermine l'équation de toutes les asymptotes des fonctions suivantes et trace un graphe possible :

$$(1) f(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{2 - x}$$

$$(2) f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$$

$$(3) f(x) = \sqrt{x^2 - 3x - 1}$$

$$(4) f(x) = \frac{3x^3 + 2x^2 - 4x - 1}{x^2 - 1}$$

$$(5) f(x) = 4 - x - \frac{2}{(x+1)^2}$$

$$(6) f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

4. Pour chaque question, coche la seule affirmation vraie (sans justification) :

(1) Soit f une fonction impaire telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$. Alors

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3$

On ne peut rien dire de la limite de f en $-\infty$

(2) La fonction $f(x) = \frac{3x^2 - 2x + 1}{x + 1}$

admet une asymptote horizontale

admet une asymptote oblique

n'admet pas d'asymptote verticale

(3) Quelles que soient les valeurs de a, b , la fonction $f(x) = a + \frac{1}{x-b}$ admet pour

asymptote la droite

$y = b$

$x = a$

$x = b$

5. Vrai ou faux ?

(1) Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

(2) Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

(3) Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} x.f(x) = 1$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

(4) Si la fonction f admet la droite $y = 9$ comme asymptote horizontale, alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{f(x)} = 3.$$